apareix, ho fa en la forma 2π, i que les fórmules serien més senzilles amb l'adopció de τ. I per tant, el dia de celebració adient és el 28 de juny (6/28 en notació nord-americana).

L'elecció de la lletra τ per representar 2π prové del fet que aquest és el nombre de radians en una volta completa al cercle, ("a turn" en anglès), i que funciona bé en català si ens referim a un "tomb" al cercle. La lògica de l'elecció es correspon al fet que l'equivalència entre un tomb sencer i les seves fraccions amb les corresponents fraccions de τ són molt més naturals que les de π. Quants maldecaps causa als estudiants de trigonometria que π radians siguin 180 graus? No fóra molt més agradable que τ radians fossin un tomb, és a dir, 360°? I així les fraccions es corresponen millor: 180° són $\tau/2$ radians (mitja volta); 90° seria $\tau/4$, i així successivament. És molt més lògic!

I no és més lògic també que la longitud de la circumferència sigui τr en lloc de $2\pi r$? Per què hem de mantenir aquest factor 2 a tot arreu? Observem que l'expressió 2π apareix a llocs tan diversos com la fórmula de la funció de densitat de la distribució normal, el teorema de Gauss-Bonnet, i la constant de Planck $\hbar$. No és molt més lògic fer servir τ en lloc de 2π a tots aquests llocs? Com demostren en el *Manifesto,* per exemple, les fórmules dels volums de les hiperesferes n-dimensionals esdevenen més senzilles atès que les fórmules amb π tenen una potència de 2 que coincideix gairebé exactament amb els denominadors necessaris si es fa servir τ.

La majoria de la gent argumenta que hi ha fórmules en les quals apareix π sol, naturalment. La fórmula més senzilla és la de l'àrea del cercle, πr^2. Però en termes de τ, la fórmula esdevé $\frac{1}{2}\tau r^2$, una fórmula que segueix perfectament la forma d'altres fórmules com la distància recorreguda en caiguda lliure $\frac{1}{2}gt^2$, o l'energia cinètica $\frac{1}{2}mv^2$. Al cap i a la fi, potser és més interessant que la primitiva de la funció x sigui $\frac{1}{2}x^2$, que no pas el fet que la primitiva de $2x$ sigui x^2.

La famosíssima fórmula d'Euler $e^{\pi i} = -1$ és un altre exemple de fórmula que es menciona on apareix π en lloc de 2π. Moltes vegades s'escriu $e^{\pi i} + 1 = 0$ i es diu molt pomposament que lliga *els cinc números més importants de les matemàtiques.* Però aquesta suma "$+1 = 0$" és una mica artificial, i la fórmula també agafa una expressió magnífica en termes de τ, com és $e^{\tau i} = 1$.

El primer lloc on això va aparèixer és l'article "π is Wrong!" de Bob Palais, aparegut al *The Mathematical Intelligencer,* volum 23, número 3, any 2001, pàgines 7-8. Es pot llegir online a `http://bit.ly/pi-is-wrong`. D'aquí el *Tau manifesto,* escrit per Michael Hartl, que podeu llegir a `www.tauday.com`. Aquest article entra dintre de la categoria *Se non è vero, è ben trovato,* i lògicament la probabilitat de que es substitueixi π per τ és ben propera a zero. Però la lectura del *Manifesto* de ben segur que us arrencarà un somriure, i potser fins i tot podeu comprar una samarreta del Tau Day i celebrar-lo quan arribi el proper 28 de juny.

Pep Burillo
Universitat Politècnica de Catalunya

Problemes

Encetem aquesta nova cita amb la secció del *SCM/Notícies* tot agraint als nostres fidels col·laboradors la seva feina desinteressada de proposar i resoldre problemes de matemàtiques, sense la qual, la secció seria impossible: moltíssimes gràcies!

Hem rebut (i publiquem) sengles solucions als problemes **A107**, **A109** i **A111**, a més d'una solució equivocada del problema **A112** que serà esmenada, segur, en un proper número del *SCM/Notícies*. Resten així pendents els problemes **A105** (*SCM/Notícies* 31), **A110** i **A112** (*SCM/Notícies* 32); us hi animeu?

Torno a recordar-vos que rebre els vostres treballs en format TEX o LaTEX, ens facilita moltíssim la feina, però totes les aportacions en qualsevol altre format (manuscrits inclosos!), són igualment ben rebudes. L'adreça de correu és la de sempre: `carles.romero.c@gmail.com`. Fins ben aviat!

Problemes proposats

A113. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Departament MA3, UPC, Barcelona)

Sigui x un nombre real i positiu. Demostreu que

$$\left(\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)^{2/3}+\left(\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)^{2/3}>\frac{3\sqrt[3]{2}-2}{2}$$

on $[x]$ i $\{x\}$ representen, respectivament, les parts entera i fraccionària del nombre x.

A114. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui P un punt interior a un triangle ABC de manera que $\widehat{ABP}=\widehat{PBC}$. Provau o refusau que P és l'incentre del triangle $\triangle ABC$ en cadascun dels dos casos següents:

a) $\widehat{BPC}=90^\circ+\widehat{BAP}$

b) $\widehat{BPC}=90^\circ+\widehat{PAC}$

A115. (Proposat per Xavier Cabré i Xavier Ros, Departament MA1, UPC, Barcelona)

Per a una matriu simètrica i definida positiva, quin dels dos nombres és més gran, el seu determinant o el producte de tots els elements de la seva diagonal?

A116. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.)

D'un cert triangle $\triangle ABC$ en retallem les tres cantonades amb rectes paral·leles als respectius costats oposats, i obtenim un hexàgon amb els costats dos a dos paral·lels.

a) Mostreu que es possible fer això de manera que l'hexàgon resultant tingui els sis costats iguals (encara que no pas els sis angles!) i trobeu la mida d'aquests sis costats iguals en funció dels costats del triangle $\triangle ABC$.

b) Trobeu la relació entre l'àrea de l'hexàgon i l'àrea del triangle.

c) Si considerem tots els triangles d'àrea 1 i els sotmetem a aquest procés de retallades, quina àrea tindrà l'hexàgon més gran dels que obtindrem?

Solucions

A107. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Demostreu que, per tot nombre natural $a>1$ d'expressió decimal amb xifra de les unitats 1, 3, 7 o 9 i per tot nombre natural n, hi ha $k\in\mathbb{N}$ de manera que a^k, expressat en base 10, té com a darreres xifres n zeros i un u.

Solució: (Solució d'Anna de Mier, Departament MA2, UPC, Barcelona.) En termes de congruències, ens cal trobar un natural k tal que

$$a^k\equiv 1 \pmod{10^{n+1}}$$

Farem servir el teorema d'**Euler**, segons el qual si a i m són coprimers, aleshores

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod{m}$$

on $\varphi(m)$ és el nombre d'enters entre 1 i $m-1$ que són coprimers amb m. Com que tot nombre que no sigui múltiple ni de 2 ni de 5 és coprimer amb qualsevol potència de 10, podem aplicar el teorema amb l'a de l'enunciat i $m=10^{n+1}$. Per tant, $k=\varphi(10^{n+1})$ satisfà el que es demana. Utilitzant propietats de la funció φ, o fent un senzill càlcul directe, trobem que $\varphi(10^{n+1})=4\cdot 10^n$.

A109. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Departament MA3, UPC, Barcelona) Trobeu totes les solucions reals del sistema

$$\begin{cases} 2x_1^2=x_2\left(x_1^2+1\right)\\ 3x_2^3=x_3\left(x_2^4+x_2^2+1\right)\\ \dots\dots\dots\dots\\ nx_{n-1}^n=x_n\left(x_{n-1}^{2n-2}+\ldots+x_{n-1}^2+1\right)\\ (n+1)x_n^{n+1}=x_1\left(x_n^{2n}+x_n^{2n-2}+\ldots+x_n^2+1\right)\end{cases}$$

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Per no carregar la notació amb múltiples subíndexs, suposarem el sistema reduït a quatre equacions i quatre incògnites x, y, z i t. El mètode de resolució emprat admet generalització de manera òbvia i, per tant, és vàlidament aplicable al cas general de n equacions i n incògnites.

Tenim doncs el sistema

$$\begin{cases} 2x^2=y\left(x^2+1\right)\\ 3y^3=z\left(y^4+y^2+1\right)\\ 4z^4=t\left(z^6+z^4+z^2+1\right)\\ 5t^5=x\left(t^8+t^6+t^4+t^2+1\right)\end{cases}$$

del qual $x=y=z=t=0$ i $x=y=z=t=1$ són solucions trivials i anem a veure que són les

úniques. Per fer-ho veurem que $x \geq y \geq z \geq t \geq x$ i que, per tant, $x = y = z = t$. Però, si les incògnites tenen el mateix valor, és clar que aquest valor només pot ser zero o u.

Comencem per escriure el sistema de manera més convenient així:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2}{x^2+1} \\ z = \dfrac{3y^3}{y^4+y^2+1} \\ t = \dfrac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} \\ x = \dfrac{5t^5}{t^8+t^6+t^4+t^2+1} \end{cases}$$

per constatar que $y \leq 0$, $z \leq 0$, $t \leq 0$ i $x \leq 0$. Aleshores

$$\begin{aligned} &0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 \leq x\left(x^2+1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \geq \frac{2x^2}{x^2+1} = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 \leq \left(y^2-1\right)^2 = y^4 - 2y^2 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2y^2 \leq y^4 + 1 \\ &\Rightarrow 2y^3 \leq y^5 + y \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3y^3 \leq y^5 + y^3 + y = \\ &= y\left(y^4+y^2+1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y \geq \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 \leq \left(z^3-1\right)^2 + z^2(z-1)^2 = \\ &= z^6 - 2z^3 + 1 + z^4 - 2z^3 + z^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4z^3 \leq z^6 + z^4 + z^2 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4z^4 \leq z\left(z^6+z^4+z^2+1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z \geq \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 \leq \left(t^4-1\right)^2 + t^2\left(t^2-1\right)^2 = \\ &= t^8 - 2t^4 + 1 + t^6 - 2t^4 + t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4t^4 \leq t^8 + t^6 + t^2 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5t^4 \leq t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5t^5 \leq t\left(t^8+t^6+t^4+t^2+1\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t \geq \frac{5t^5}{t^8+t^6+t^4+t^2+1} = x \end{aligned}$$

Resulta $x \geq y \geq z \geq t \geq x$ i, per tant, $x = y = z = t$, i això acaba la demostració.

A111. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.) Sigui ABC un triangle i sigui $B'C'$ una recta variable paral·lela al costat BC, amb B' sobre el costat AC i C' sobre el costat AB. Trobeu el lloc geomètric del punts I d'intersecció dels segments BB' i CC'.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

La recta que uneix els punts A i I talla el costat BC en el punt M i el segment $B'C'$ en el punt M'. Com que $B'C'$ és paral·lel a BC, tenim

$$\frac{C'M'}{BM} = \frac{AM'}{AM} = \frac{M'B'}{MC}$$

i, per tant,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{C'M'}{M'B'}$$

D'altra banda, els triangles $\triangle IBM$ i $\triangle IB'M'$ són semblants. També són semblants $\triangle IMC$ i $\triangle IM'C'$. Per tant,

$$\frac{M'B'}{BM} = \frac{M'I}{IM} = \frac{C'M'}{MC} \qquad (*)$$

o sigui

$$\frac{BM}{MC} = \frac{M'B'}{C'M'} \qquad (**)$$

De $(*)$ i $(**)$ es dedueix que

$$\left(\frac{BM}{MC}\right)^2 = 1$$

que dóna

$$BM = MC$$

Això i el fet que els punts B, M i C estan alineats ens diu que M és el punt mitjà del costat BC del triangle $\triangle ABC$. Així, doncs, el lloc geomètric del punt I és la mediana AM del $\triangle ABC$, els punts A i M exclosos.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga